10.2 常数项级数的审敛法

10.2.1 正项级数及其审敛法

10.2.2 交错级数及其审敛法

10.2.3 绝对收敛与条件收敛

10.2.1 正项级数及其审敛法

如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$中各项均有$u_n \geq 0$, 这种级数称为正项级数. 其部分和数列$\{s_n\}$为单调增加数列.

若数列$\{a_n\}$单调增加，则

$$\{a_n\}收敛 \Leftrightarrow \{a_n\}有界.$$

定理10.2.1 (充要条件)

$$正项级数\sum_{n=1}^{\infty} u_n 收敛 \Leftrightarrow 数列\{s_n\}收敛$$

$$\Leftrightarrow \{s_n\}有界.$$

定理10.2.2 (比较审敛法)

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$均为正项级数，且$u_n \le v_n$,

（1）若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛, 则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛;

（2）若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散.

证明 (1) 设$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ $\because u_n \le v_n$,

且$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \le v_1 + v_2 + \cdots + v_n \le \sigma$,

即部分和数列有界 $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛.

(2) 反设$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛， 由(1), $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛.

推论10.2.1 设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$均为正项级数，且存在$k>0$和正整数N，当$n\geq N$时，有$u_n\leq kv_n$,则：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛 $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散 $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散.

证明：(1) $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=N}^{\infty}v_n$收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=N}^{\infty}kv_n$收敛

$\Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty}u_n$收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

比较审敛法的不便： 须有参考级数.

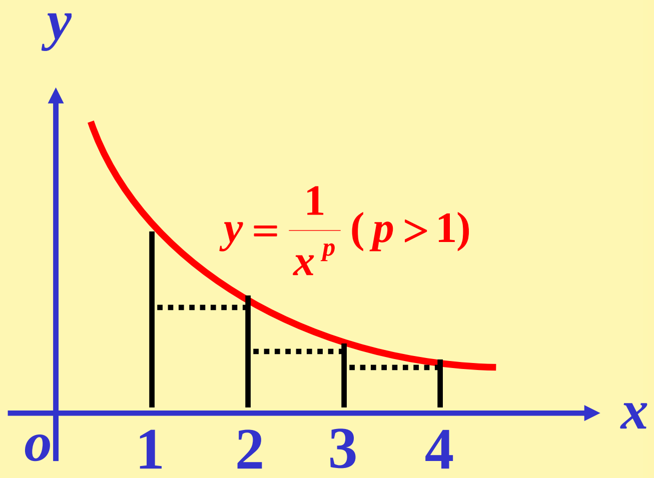
重要参考级数： 几何级数，调和级数， P-级数

例 1 讨论 P-级数

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$ 的收敛性. $(p>0)$

解 $p=1$,为调和级数，发散。

$0<p<1$时，$\because \frac{1}{n^p}\geq\frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$发散.



设 $p>1$, $\frac{1}{n^p}\cdot 1<\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{x^p}$

$$s_n=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}$$

$$\leq 1+\int_1^2\frac{dx}{x^p}+\cdots+\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{x^p}=1+\int_1^n\frac{dx}{x^p}$$

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \le 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^p}$$

$$= 1 + \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{n^{p-1}}\right) \le 1 + \frac{1}{p-1}$$

即s_n有界， 所以$P-$级数收敛.

$$P-\text{级数}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\quad\begin{cases}\text{当}p>1\text{时，}&\text{收敛}\\ \text{当}0<p\le 1\text{时，}&\text{发散}\end{cases}$$

类比

$$\text{广义积分}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\quad\begin{cases}\text{当}p>1\text{时，}&\text{收敛}\\ \text{当}0<p\le 1\text{时，}&\text{发散}\end{cases}$$

例 2 判断下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$　　(2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$

解　(1) $\because \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}$,　而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散,

$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 发散.

(2)　由于 $n \geq 2$ 时，$n^2-1 > (n-1)^2$,

故 $u_n = \frac{1}{n^2-1} < \frac{1}{(n-1)^2}$

而 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2}$ 收敛，所以 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$ 收敛.

定理10.2.3 比较审敛法的极限形式

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，如果 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$，

则（1）当 $0<l<+\infty$ 时，二级数有相同的敛散性；

（2）当 $l=0$ 时，若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

（3）当 $l=+\infty$ 时，若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

注：条件中“两个级数都是正项的”不能少

$$u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n},\quad v_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$$

但$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，$\quad\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}v_n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

例 3 判断下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2})$ $\quad\because\ \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}}=1$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2})$收敛。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-n}$ $\quad\because \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3^n-n}}{\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{n}{3^n}}=1,$

$\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$收敛, 故原级数收敛.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\ln(\frac{n+1}{n}),$ $\quad\because \frac{1}{\sqrt{n+1}}\ln(1+\frac{1}{n})\sim\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛, 所以原级数收敛。

定理 10.2.4 (比值审敛法,达朗贝尔D'Alember审敛法)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$

则 $0\le\rho<1$ 时级数收敛；$\rho>1$（包括 $\rho=+\infty$）时级数发散；$\rho=1$ 时失效.

比值审敛法的优点：不必找参考级数.

注意：（1）当 $\rho=1$ 时比值审敛法失效；

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}}=1=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\dfrac{1}{n^2}}$$

(2)　条件是充分的，而非必要.

例　判断由$u_n=\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$构造的无穷级数的敛散性.

解　设$a_n=\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{2+(-1)^{n+1}}{2(2+(-1)^n)}$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=\dfrac{1}{6}$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n+1}=\dfrac{3}{2}$, $\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在.

但$u_n=\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}\le\dfrac{3}{2^n}=v_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{2^n}$ 收敛

$\therefore$ 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$收敛.

例4 判断下列各级数的敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$, (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n!}$,

解（1） $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}[\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^3}]$

$=\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})^3]=\frac{1}{2}$ 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$收敛。

（2） $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}[\frac{e^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{e^n}]=\lim_{n\to\infty}\frac{e}{n+1}=0$

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n!}$收敛。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n \cdot n!}{n^n} \quad (a > 0)$

$$(3) \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{a^n n!} \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{a}{e}$$

当$a > e$时，级数发散. 当$0 < a < e$时，级数收敛.

当$a = e$时, 由于$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} > 1$ 从而:

$u_{n+1} > u_n$, $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$. 级数发散.

应用：利用级数收敛的必要条件求极限

性质 当n无限增大时，它的一般项 u_n趋于零，即

$$\text{级数收敛} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

求 $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$ 转化为判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ 是否收敛

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n \cdot n!}{n^n} \quad (a > 0)$$

当$a \geq e$时，级数发散.

当$0 < a < e$时，级数收敛.

$$\text{所以} \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

$$(4)\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$$ 用比值法失效时,一般用比较法.

$$(4)\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{\ln n}\right]=1$$ 比值法失效。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln n}{n^2}}{\frac{1}{n^k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{2-k}}=a$$ 取 $k=?$

当$k\geq 2$时$a=\infty$, 而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$收敛，不能说明问题

当$0<k<2$时

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{2-k}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{(2-k)\cdot x^{1-k}}=0$$

$$(4)\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$$

$$(4)\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}[\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{\ln n}]=1$$ 比值法失效。

当$0<k<2$时 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln n}{n^2}}{\frac{1}{n^k}}=0$$

当$0<k\le 1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$发散，　不能说明问题

当$1<k<2$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$收敛　可用来判断 取$k=\frac{3}{2}$

(4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$,

解:

取$\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 则$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{1/2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{1/2}}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{-1/2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$ 又$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛,

所以原级数收敛。 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^s}(s>1)$ 收敛,

取$v_n=\frac{1}{n^k}$做比较, 其中$1<k<s$

定理 10.2.5 (根值审敛法,也称柯西判别法)

对于正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，若$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，则：

当0≤ρ<1时，级数收敛，

当ρ>1时级数发散（包括∞），

当ρ=1时级数可能收敛也可能发散。

说明：$\rho=1$时，仍以p-级数为例

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}$$

例5 判别下列级数的敛散性

$$(1)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n} \qquad (2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{5^n-3^n}$$

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln n}=0$, 该级数收敛。

$$(2)\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{4^n}{5^n-3^n}}=\lim_{n\to\infty}[\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{1-(\frac{3}{5})^n}}]=\frac{4}{5},$$

该级数收敛。

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-(\frac{3}{5})^n\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln\left(1-(\frac{3}{5})^n\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-(\frac{3}{5})^x}{x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-(\frac{3}{5})^x\ln\frac{3}{5}}{1}}=e^0=1$$

总结: 1 若能求出 $\frac{1}{n}$ 的阶，用比较判别法。

2 当 u_n 含有 a^n, n^n 时，用根值判别法。

3 当 u_n 含有 $a^n, n^n, n!$ 时，用比值判别法。

用比值法或根值法失效时,一般用比较法.

例6 判别下列级数的敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2^n}{n^2 2^n}$ 方法：拆成两个级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2^n}{n^2 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$ 收敛

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{8^{\ln n}}$ 方法：根植判别法

$$\because \lim_{n\to\infty}\left(8^{\ln n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}8^{\frac{\ln n}{n}}=8^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}}$$

$$=8^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}=8^0=1.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(8^{\ln n}\right)^{\frac{1}{n}}}=2>1,$$ 发散

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\sin\frac{\pi}{3^n}}{2^n\frac{\pi}{3^n}}=1$$

方法：比较法，收敛

(4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$　　当 $x>1$时，$x>\ln x$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}>\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\to 1\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}\neq 0$$ 发散

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}[\sqrt{2}+(-1)^n]^n$　　不能用根植法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\sqrt{2}+(-1)^n]}{3}(\sqrt[n]{n})^3$$ 不存在

$$\frac{n^3}{3^n}[\sqrt{2}+(-1)^n]^n\le\frac{n^3}{3^n}[\sqrt{2}+1]^n,$$

再用比值或根值判别　　收敛

10.2.2 交错级数及其审敛法

称形如：$u_1 - u_2 + u_3 - \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots$

或$-u_1 + u_2 - u_3 + \dots + (-1)^{n} u_n + \dots$ (其中$u_k>0$, k=1，2，…)的级数为交错级数.

定理 10.2.6 (莱布尼兹定理) 若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足条件 (1) $u_n \geqslant u_{n+1} > 0$; (2) $u_n \to 0\ (n\to\infty)$

则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛,其和$s$满足$s\le u_1$, $|r_n| \le u_{n+1}$

证明 $S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n})$

$= u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}$

$$S_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2n-1}-u_{2n})$$

$$=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots-(u_{2n-2}-u_{2n-1})-u_{2n}$$

所以$\{S_{2n}\}$单调增加 且$S_{2n}\le u_1$.

由数列收敛的单调有界准则知:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n}\text{存在，记为 }S\text{，则}S\le u_1.$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}(S_{2n}+u_{2n+1})=\lim_{n\to\infty} S_{2n}+\lim_{n\to\infty} u_{2n+1}=S$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$。 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}=S\le u_1$.

定理 10.2.6 (莱布尼兹定理) 若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足条件 (1) $u_n \geqslant u_{n+1} > 0$; (2) $u_n \to 0\ (n \to \infty)$

则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛,其和$s$满足$s \le u_1$, $|r_n| \le u_{n+1}$

$$r_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} \cdots)$$

$\therefore |r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} \cdots$ 右端也是一交错级数,

它也满足收敛的两个条件，于是有 $|r_n| \le u_{n+1}$

判定$u_{n+1} < u_n$的方法 1) $u_{n+1} - u_n < 0$;

2) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$; 3）相应函数的单调性 .

例7 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\cdots$ 收敛

一般结论：交错级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$当$p>0$时收敛。

一些反例：

(1)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ $\because \lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 不存在

级数发散，尽管$u_n \geq u_{n+1}$.

(2)$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}u_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{2^n}+\cdots$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$发散 尽管$\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

(1)和(2)说明：*Leibniz*定理中的两个条件去掉一个，结论未必成立

但*Leibniz*定理的条件不成立，

交错级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}u_n$仍可能收敛

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}u_n = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$$ 收敛

$u_n \geq u_{n+1}$不成立！

例 8 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$

解: $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n-\ln n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1-\frac{\ln n}{n}}=0.$

$\because \quad f(x)=x-\ln x \quad (x>1),\quad f'(x)=1-\frac{1}{x}>0 \quad (x>1),$

$\therefore$ $f(x)$在$[1,+\infty)$上单增, 即 $\frac{1}{x-\ln x}$单减,

故 $\frac{1}{n-\ln n}$当$n>1$时单减,

$\therefore \quad u_n=\frac{1}{n-\ln n}>\frac{1}{(n+1)-\ln(n+1)}=u_{n+1}\ (n>1),$

所以此交错级数收敛.

10.2.3 绝对收敛与条件收敛

定义：正项和负项任意出现的级数称为任意项级数.

$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ 其中u_n为任意实数。

任意项级数的各项取绝对值

任意项级数 $\Longrightarrow$ 正项级数

定理10.2.7 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛。

证明 令 $v_n=\frac{1}{2}(u_n+|u_n|)$， 显然有$0\leqslant v_n\leqslant|u_n|$。

依正项级数的比较审敛法，知$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛， 进而知

$\sum_{n=1}^{\infty}2v_n$收敛， 另一方面， $u_n=2v_n-|u_n|$， 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(2v_n-|u_n|)=\sum_{n=1}^{\infty}2v_n-\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$$ 也收敛。

任意项级数的敛散性

1. $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛： $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛；

2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛：$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

3. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例9　判别下列级数的敛散性,若收敛,是绝对收敛还是条件收敛?

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$$

解　(1) $\because \left|\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right| = \frac{1}{n^2+1}$，$\therefore$ 原级数绝对收敛；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$

(2) $\because \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$, $\therefore$ 原级数不会绝对收敛 .

原级数是交错级数, 满足莱布尼兹定理,

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛.

(3) 因为 $\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$ 绝对收敛。

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$ 交错级数

(4) $\sqrt[n]{|u_n|}=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})^n \to \frac{e}{2}\quad(n\to\infty),\qquad \frac{e}{2}>1$

所以 $\lim_{n\to\infty}|u_n|\neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$， 该级数发散。

注意 当$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散时，一般不能确定 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$也发散

但如果我们是用比值法或根值法判定

有$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}>1$或$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}>1$，则 $\lim_{n\to\infty}|u_n|\neq 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$， 所以$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$一定发散。

定理 如果任意项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho$（或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\rho$）

则当 $\rho < 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛；

当 $\rho > 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散（其中 ρ 可以为 $+\infty$）

$u_n \to 0?$

- 否 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散
- 是
  - $u_n \geq 0$
    - 比值法、根值法
    - 比较法、比较法的极限 形式
    - 级数收敛的定义、性质
  - 一般项级数
    - 首先考察 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$
    - 如收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛
    - 如发散
      - 若用比值，根值，则发 散
      - 交错级数
        - 莱布尼兹判别法
        - 对 u_n 进行处理
        - 用定义
      - 其他,用定义